TALLER PREPARACIÓN OLIMPIADAS

9-2-18

1. Si dos alturas de un tringulo h_1, h_2 verifican que $h_1 = 2h_2$, demuestra que la tercera altura h_3 verifica

$$h_1/3 \leq h_3 \leq h_1$$

2. Teorema de Ceva. Dado un triángulo ABC, y los puntos D, E, y F que se encuentran sobre los lados BC, CA, y AB respectivamente, los segmentos AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$. *Trabajar con las áreas de los triángulos que se forman en relación con los segmentos de los lados* Revisar otros casos: dos de los puntos D, E, F están en las prolongaciones de los lados, ó AD, BE, CF son paralelas...

3. Demostrar las siguientes afirmaciones usando el Teorema de Ceva.

a) Las medianas de un triángulo concurren (baricentro).

b) Las bisectrices de un triángulo concurren (incentro).

c) Las alturas de un triángulo concurren (ortocentro).

d) La bisectriz interna de un ángulo y dos bisectrices externas los otros dos ángulos concurren (exincentro).

e) Las rectas que unen los vértices con los puntos de tangencia del círculo inscrito concurren (punto de Gergonne).

4. En un triángulo ABC la recta obtenida por la reflexión de la mediana del vértice A sobre la bisectriz del ángulo en A se llama simediana correspondiente al vértice A. Demostrar que la simediana corta al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los cuadrados de los lados adyacentes. *Trabajar con las áreas de los triángulos que se forman en relación con los segmentos de los lados* Demostrar que las simedianas en el triángulo ABC son concurrentes (punto de Lemoine).

5. Sea K una circunferencia y ABC un triángulo. Sean L, L', M, M', N, N' los puntos de corte de K con los lados BC, CA y AB respectivamente. Demuestra que si las rectas AL, BM y CN son concurrentes entonces las rectas AL', BM' y CN' también lo son.

6. Teorema de Menelao (dual del de Ceva). Dado un triángulo ABC, y los puntos D, E, F que se encuentran en las líneas de BC, AC, AB, probar que D, E, F están alineados si y sólo si: $\frac{EA}{EC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{FB}{FA} = 1$ Uno o tres de los puntos D, E, F están en las prolongaciones de los lados.

7. Sea ABC un triángulo.

a) Si A' es un punto de BC tal que AA' es la bisectriz exterior, demuestra que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC}$.

b) Suponemos que las bisectrices interiores de B y C cortan a AC y AB en B' y C' respectivamente, y que la bisectriz exterior de A corta a BC en el punto A'. Demuestra que A', B' y C' están alineados.

c) Demuestra que los puntos en los que las bisectrices exteriores cortan a su lado opuesto correspondiente están alineados.

8. *Fase Local 2015, problema 2.* Sean r y s dos rectas paralelas, y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r, sea C el punto de la recta s tal que $\widehat{BAC} = 90°$, y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC. Demuestra que, independientemente de qué punto B de la recta r tomemos, el punto P está sobre una circunferencia fija.

9. En el triángulo ABC, rectángulo en A, se consideran las circunferencias inscrita y circunscrita. La recta AM es tangente a la circunferencia circunscrita en el punto A (M es un punto de BC). S y R son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los catetos AC y AB, respectivamente. La recta RS corta a la recta BC en N. Las rectas AM y SR se cortan en U. Demostrar que el triángulo UMN es isósceles.

10. Círculo de los nueve puntos de un triángulo. Los puntos que bisecan los lados (3), los pies de las alturas (3), y los puntos que bisecan los segmentos que conectan los vértices con el ortocentro (3) de todo triángulo pertenecen a una misma circunferencia.

11. *Problema 6 de la Fase Local de Valladolid 2016.* Sea ABC un triángulo rectángulo en C. Sean ACP y BCQ triángulos rectángulos isósceles, con el vértice del ángulo recto en P y Q, respectivamente, exteriores a ABC. Además, sea F el pie de la altura desde C sobre el lado AB, y D, E los puntos de intersección de la recta AC con PF y de la recta BC con QF, respectivamente. Demostrar que $DC = EC$.

12. *Problema 3 de la fase autonómica 2016 de Castilla y León.* En el triángulo ABC, K es el punto medio de BC y L es el punto medio de AK. La circunferencia que pasa por los puntos K, C y L corta de nuevo a AC en el punto M. Se sabe además que el centro de esa circunferencia está en el lado AC y que $AC = 3AM$. Los lados del triángulo ABC son proporcionales a tres números reales positivos, no necesariamente iguales dos a dos. Hallar esos números.